משוואות של פיסיקה מתמטית

תוכן העניינים

1. טורי חזקות 1
2. פתרון מד״רים על ידי טורים 16
3. בעיות שטורם ליוביל 21
4. משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון ..... (ללא ספר)
5. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
6. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
7. משוואת החום ..... (ללא ספר)
8. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
9. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 1 - טורי חזקות

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 1
2. טור טיילור סביב X=X0 3
3. חישוב סכום של טור 4
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן 5
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ 6
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים 8
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' 9
8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות 15

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e 2) e^{-2} 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

תשובות סופיות

1) $\dfrac{1}{120}$

2) $\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:

$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר **1** עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר **3**, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר **2**, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x)-p(x)|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 2 - פתרון מד"רים על ידי טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 16
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית 18
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 20

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1,\quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$)

8) פתרו את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$,
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתרו את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2,\quad y'(-1)=-2$.

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots \quad , \quad a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 5)$

2) $y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 3)$.

3) $y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\ge 2)$

4)
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\ge 4)$$

5)
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

6)
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\ge 3)$$

7)
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

8)
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\ge 3)$$

9)
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות

בשאלות **2-5**, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם.
בשאלות **6** ו-**7** הפתרונות שווים, ובשאלות **8** ו-**9** הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$$

2) $$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3) $$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$$

4) $$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5) $$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+$$
$$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$$

6) $$y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8) $$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 21

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^{x}y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\,,\,0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו. התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$? האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\,,\,0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א. התחילו את הטור מ-$n=1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\quad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\quad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\quad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\quad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\quad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\quad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\quad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב-$x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב-$x=1.5$ הוא 1; וב-$x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 4 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים ..... (ללא ספר)

2. שיטת לגראנג ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 5 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
5. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 8 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
3. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
6. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
7. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 9 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)